1)

Άσκηση 1. Να βρεθεί η γενική λύση των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.):

i) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$, ii) $y^{(iv)}(x)+13y''(x)+36y(x)=0$,

iii) $y'''(x)+y'(x)=0$, iv) $y^{(vi)}(x)+4y^{(iv)}(x)-16y''(x)-64y(x)=0$.

Λύση (i) Για να βρούμε τη γενική λύση (γ.λ.) της Σ.Δ.Ε.

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0, \qquad (1)$$

που είναι γραμμική, ομογενής, δεύτερης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, αναζητούμε λύσεις της μορφής $y_\lambda(x)=e^{\lambda x}$, οπότε $y'_\lambda(x)=\lambda e^{\lambda x}$, $y''_\lambda(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}$ και αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνουμε:

$$\lambda^2 e^{\lambda x}-4\lambda e^{\lambda x}+4e^{\lambda x}=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-4\lambda+4)e^{\lambda x}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0.$$

Η τελευταία είναι η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (1) η οποία γράφεται $(\lambda-2)^2=0$ και έχει τη **διπλή** πραγματική ρίζα $\lambda=+2$. Επομένως, οι δύο (πραγματικές) γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1) είναι οι: $y_1(x)=e^{2x}$ και $y_2(x)=xe^{2x}$. Επομένως η γ.λ. της (1) έχει τη μορφή

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}, \text{ όπου } c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

(ii) Η Σ.Δ.Ε.

$$y^{(iv)}(x)+13y''(x)+36y(x)=0, \qquad (2)$$

είναι γραμμική, ομογενής, τέταρτης τάξης, με σταθερούς συντελεστές και η χ.ε. είναι $\lambda^4+13\lambda^2+36=0$ ή $(\lambda^2+4)(\lambda^2+9)=0$ με τις τέσσερεις (απλές) μιγαδικές ρίζες $\lambda_1=+2i$, $\lambda_2=-2i$, $\lambda_3=+3i$ και $\lambda_4=-3i$. Οι αντίστοιχες λύσεις της Σ.Δ.Ε. (2) είναι οι:

$$y_1(x)=e^{+2ix}, y_2(x)=e^{-2ix}, y_3(x)=e^{+3ix}, y_4(x)=e^{-3ix},$$

ή ισοδύναμα, οι τέσσερεις (πραγματικές) γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (2) είναι οι:

$$y_1(x)=\cos 2x,\quad y_2(x)=\sin 2x,\quad y_3(x)=\cos 3x,\quad y_4(x)=\sin 3x,$$

και η γ. λ. της (2) είναι

$$y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

(iii) Η Σ.Δ.Ε.

$$y'''(x)+y'(x)=0, \qquad (3)$$

είναι γραμμική, ομογενής, τρίτης τάξης, με σταθερούς συντελεστές και η χ.ε. είναι $\lambda^3+\lambda=0$ ή $\lambda(\lambda^2+1)=0$. Άρα οι τρεις ρίζες της χ.ε. είναι η πραγματική: $\lambda_1=0$ και οι δύο

η οποία έχει (έξι) ρίζες τις απλές πραγματικές: $\lambda_1=+2$, $\lambda_2=-2$ και τις 2 (διπλές) συζυγείς μιγαδικές: $\lambda_{3,4}=+2i$, και $\lambda_{5,6}=-2i$. Οι αντίστοιχες λύσεις της Σ.Δ.Ε. (4) είναι οι:

$$y_1(x)=e^{+2x}, y_2(x)=e^{-2x}, y_3(x)=e^{+2ix}, y_4(x)=xe^{+2ix}, y_5(x)=e^{-2ix}, y_6(x)=xe^{-2ix}$$

ή ισοδύναμα, οι έξι (πραγματικές) γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (4) είναι οι:

$$y_1(x)=e^{2x},\ y_2(x)=e^{-2x},\ y_3(x)=\cos 2x,\ y_4(x)=x\cos 2x,\ y_5(x)=\sin 2x,\ y_6(x)=x\sin 2x,$$

και η γ. λ. της (4) είναι

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4x\cos 2x+c_5\sin 2x+c_6x\sin 2x,$$

όπου $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\ c_6$ αυθαίρετες σταθερές.

Άσκηση 2. *Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών για την εύρεση μιας λύσης μιας μη ομογενούς, γραμμικής Σ.Δ.Ε., με σταθερούς συντελεστές, μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης έχει την μορφή:*

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos(\beta x)+Q_r(x)\sin(\beta x)\right],$$

όπου $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ *και* $P_m(x),\ Q_r(x)$ *πολυώνυμα του x βαθμού m και r αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση η Σ.Δ.Ε. που θέλουμε να επιλύσουμε επιδέχεται λύση της μορφής:*

$$y_\mu(x)=x^\pi e^{\alpha x}\left[R_s(x)\cos(\beta x)+T_s(x)\sin(\beta x)\right],$$

όπου $s=\max\{m,r\}$, $R_s(x),\ T_s(x)$ *πολυώνυμα του x βαθμού s, των οποίων οι συντελεστές πρέπει να προσδιορισθούν και π η πολλαπλότητα με την οποία ο αριθμός* $\alpha+i\beta$ *εμφανίζεται ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε. (Αν ο* $\alpha+i\beta$ *δεν είναι ρίζα της αντίστοιχης χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε π = 0, αν είναι απλή ρίζα τότε π = 1, αν είναι ρίζα πολλαπλότητας m, τότε π = m).*

Με βάση τα ανωτέρω να βρείτε τη <u>μορφή μιας μερικής λύσης</u> των κάτωθι Σ.Δ.Ε. (<u>χωρίς να προσδιορίσετε επακριβώς τους αντίστοιχους συντελεστές</u>).

i) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=-6x^2e^{2x}$, ii) $y^{(iv)}(x)+13y''(x)+36y(x)=\cos 3x-x\sin 4x$.

iii) $y'''(x)+y'(x)=3-3\sin x$, iv) $y^{(vi)}(x)+4y^{(iv)}(x)-16y''(x)-64y(x)=e^{2x}+\cos 2x$.

(<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιείστε ως δεδομένη τη λύση της άσκησης 1.)

Λύση. (i) Ο μη ομογενής όρος της (i) είναι: $f(x)=-6x^2e^{2x}=e^{2x}\left[-6x^2\cos(0x)+0\sin(0x)\right]$, όπου $\alpha=2$, $\beta=0$, $P_2(x)\equiv-6x^2$, $Q_0(x)\equiv 0$, $s=2$. Ο αριθμός $\alpha+i\beta=2$ είναι **(διπλή)** ρίζα της χ.ε. της (i) (βλέπε άσκηση 1(i)), οπότε $\pi=2$. Συνεπώς η (i) δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$$y_\mu(x)=x^2e^{2x}[(Ax^2+Bx+\Gamma)\cos 0x+(\Delta x^2+Ex+Z)\sin 0x]=x^2e^{2x}(Ax^2+Bx+\Gamma),$$

όπου Α, Β, Γ σταθερές.

(ii) Ο μη ομογενής όρος της (ii) είναι: $f(x)=\cos 3x-x\sin 4x$ (άθροισμα δύο παραγόντων), θα βρούμε από μία μερική λύση για κάθε ένα παράγοντα. Για το $\cos 3x$ έχομε:

3)

$\cos 3x = e^{0x}[1\cos 3x + 0\sin 3x]$, οπότε $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $P_0(x) \equiv 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $s = 0$. Ο αριθμός $\alpha + \beta i = 3i$ είναι **(απλή)** ρίζα της χ.ε.της (ii) (βλέπε άσκηση 1(ii)), οπότε $\pi = 1$. Συνεπώς η (ii) για τον όρο cos3x δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$$y_{\mu 1}(x) = xe^{0x}[A\cos 3x + B\sin 3x] = x[A\cos 3x + B\sin 3x], \text{ όπου } A, B \text{ σταθερές.}$$

Επίσης για τον όρο $-x\sin 4x$ έχομε: $-x\sin 4x = e^{0x}[0\cos 4x - x\sin 4x]$, οπότε $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $P_0(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv -X$, $s = 1$. Ο αριθμός $\alpha + i\beta = 4i$ **δεν** είναι ρίζα της χ.ε. της (ii) (βλέπε άσκηση 1(ii)), οπότε $\pi = 0$. Συνεπώς η (ii) για τον όρο $-x\sin 4x$ δέχεται μια μερική λύση της μορφής: $y_{\mu 2}(x) = e^{0x}[(\Gamma x + \Delta)\cos 4x + (Ex + Z)\sin 4x]$, όπου Γ,Δ,Ε,Ζ σταθερές. Τελικά η (ii) δέχεται τη μερική λύση

$$y_\mu(x) = y_{\mu 1}(x) + y_{\mu 2}(x) = x[A\cos 3x + B\sin 3x] + [(\Gamma x + \Delta)\cos 4x + (Ex + Z)\sin 4x],$$

όπου Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ σταθερές.

(iii) Ο μη ομογενής όρος της (iii) είναι: $f(x) = 3 - 3\sin x$ (άθροισμα δύο παραγόντων). Θα βρούμε από μία μερική λύση για κάθε ένα παράγοντα. Για το 3 έχομε: $3 = e^{0x}[3\cos(0x) + 0\sin(0x)]$, οπότε $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_0(x) \equiv 3$, $Q_0(x) \equiv 0$, $s = 0$. Ο αριθμός $\alpha + \beta i = 0$ είναι **(απλή)** ρίζα της χ.ε.της (iii) (βλέπε άσκηση 1(iii)), οπότε $\pi = 1$. Συνεπώς η (iii) για τον όρο 3 δέχεται μια μερική λύση της μορφής

$$y_{\mu 1}(x) = x^1 e^{0x}[A\cos(0x) + B\sin(0x)] = Ax, \text{ όπου } A \text{ σταθερά.}$$

Επίσης για τον όρο $-3\sin x$ έχομε: $-3\sin x = e^{0x}[0\cos x - 3\sin x]$, οπότε $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_0(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv -3$, $s = 0$. Ο αριθμός $\alpha + i\beta = i$ είναι **(απλή)** ρίζα της χ.ε.της (iii) (βλέπε άσκηση 1(ii)), οπότε $\pi = 1$. Συνεπώς η (iii) για τον όρο $-3\sin x$ δέχεται μια μερική λύση της μορφής: $y_{\mu 2}(x) = x^1 e^{0x}[\Gamma\cos x + \Delta\sin x] = x[\Gamma\cos x + \Delta\sin x]$, όπου Γ,Δ σταθερές. Τελικά η (iii) δέχεται τη μερική λύση:

$$y_\mu(x) = y_{\mu 1}(x) + y_{\mu 2}(x) = Ax + x[\Gamma\cos x + \Delta\sin x], \text{ όπου } A, \Gamma, \Delta \text{ σταθερές.}$$

(iv) Ο μη ομογενής όρος της (iv) είναι: $f(x) = e^{2x} + \cos 2x$ (άθροισμα δύο παραγόντων). Θα βρούμε από μία μερική λύση για κάθε ένα παράγοντα. Για τον e^{2x} έχομε $e^{2x} = e^{2x}[1\cos(0x) + 0\sin(0x)]$, οπότε $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $P_0(x) \equiv 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $s = 0$. Ο αριθμός $\alpha + i\beta = 2$ είναι **(απλή)** ρίζα της χ.ε. της (iv) (βλέπε άσκηση 1 (iv)), οπότε $\pi = 1$. Συνεπώς η (iv) για τον όρο e^{2x} δέχεται μια μερική λύση της μορφής: $y_{\mu 1}(x) = x^1 e^{2x}[A\cos(0x) + B\sin(0x)] = Axe^{2x}$, όπου Α σταθερά. Επίσης για τον όρο $\cos 2x$ έχουμε $\cos 2x = e^{0x}[1\cos 2x + 0\sin 2x]$, οπότε $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_0(x) \equiv 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $s = 0$. Ο αριθμός $\alpha + i\beta = 2i$ είναι **(διπλή)** ρίζα της χ.ε.της (iv) (βλέπε άσκηση 1 (iv)), οπότε $\pi = 2$. Συνεπώς η (iv) για τον όρο $\cos 2x$ δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$$y_{\mu 2}(x) = x^2 e^{0x}[\Gamma\cos 2x + \Delta\sin 2x] = x^2[\Gamma\cos 2x + \Delta\sin 2x], \text{ όπου } \Gamma, \Delta \text{ σταθερές.}$$

Τελικά η (iv) δέχεται τη μερική λύση: $y_\mu(x) = y_{\mu 1}(x) + y_{\mu 2}(x) = Axe^{2x} + x^2[\Gamma\cos 2x + \Delta\sin 2x]$, όπου Α, Γ, Δ σταθερές.

Άσκηση 3. Δίνεται η Σ.Δ.Ε.:

$$y'''(x) + y'(x) = 3 - 3\sin x \qquad (1)$$

με τις συνθήκες: $$y(0) = 2,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = y(0). \qquad (2)$$

(i) Τι είδους πρόβλημα είναι το (1)–(2), αρχικών ή συνοριακών τιμών και γιατί.

(ii) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (1)–(2) με χρήση της μεθόδου των απροσδιόριστων συντελεστών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (1).

(iii) Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα.

Λύση. (i) Αφού οι συνθήκες (2) δίνονται για την (αρχική) τιμή x=0 πρόκειται για πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.).

4)

(ii) Για να βρούμε τη λύση του Π.Α.Τ. πρέπει πρώτα να βρούμε τη γενική λύση της Σ.Δ.Ε.

$$y'''(x)+y'(x)=3-3\sin x \qquad (1)$$

που είναι γραμμική, μη ομογενής, τρίτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες (2). Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε:

α) την γενική λύση, έστω $y_o(x)$, της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε., δηλ. της

$$y'''(x)+y'(x)=0 \qquad (1')$$

β) μια μερική (ειδική) λύση, έστω $y_\mu(x)$ της (1), και να προσθέσουμε τις $y_o(x)$ και $y_\mu(x)$.

Παρατηρούμε ότι η (1΄) είναι η ίδια με την εξίσωση (iii) της Άσκησης 1, οπότε η γ.λ. της ομογενούς (1΄) είναι

$$y_0(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x\,, \quad \text{όπου } c_1,c_2,c_3 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη και με δεδομένο το αποτέλεσμα της εξίσωσης (iii) της Άσκησης 1, αναζητούμε μια μερική λύση $y_\mu(x)$ της (1) της μορφής:

$$y_\mu(x)=\mathrm{A}x+x[\Gamma\cos x+\Delta\sin x]\,, \quad \text{όπου } \mathrm{A},\Gamma,\Delta \text{ σταθερές.}$$

Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x, βρίσκουμε

$$y'_\mu(x)=\mathrm{A}+\Gamma\cos x-\Gamma x\sin x+\Delta\sin x+\Delta x\cos x\,,$$

$$y''_\mu(x)=-2\Gamma\sin x+2\Delta\cos x-\Gamma x\cos x-\Delta x\sin x\,, \quad \text{και}$$

$$y'''_\mu(x)=-3\Gamma\cos x-3\Delta\sin x+\Gamma x\sin x-\Delta x\cos x\,,$$

Θέτοντας τις τιμές των $y'_\mu(x)$ και $y'''_\mu(x)$ στην εξίσωση (1), βρίσκουμε

$$y'''(x)+y'(x)=\mathrm{A}-2\Gamma\cos x-2\Delta\sin x=3-3\sin x\,.$$

Άρα $\mathrm{A}=3$, $\Gamma=0$, $\Delta=\dfrac{3}{2}$, και επομένως μια μερική λύση της (1) είναι η $y_\mu(x)=3x+\dfrac{3}{2}x\sin x$.

Συνεπώς η γενική λύση της (1) είναι,

$$y(x)=y_o(x)+y_\mu(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+3x+\frac{3}{2}x\sin x\,, \quad \text{όπου } c_1,c_2,c_3 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες. Επειδή

$$y'(x)=-c_2\sin x+c_3\cos x+3+\frac{3}{2}\sin x+\frac{3}{2}x\cos x\,, \quad \text{και}$$

5)

έχουμε:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0) = c_3 + 3 = 3,$$

$$y''(0) = -c_2 + 3 = 2$$

από όπου προκύπτει ότι $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ και $c_3 = 0$. Άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(x) = 1 + \cos x + 3x + \frac{3}{2} x \sin x.$$

(iii) **Επαλήθευση.** Παραγωγίζοντας την y(x) τρείς φορές ως προς x, βρίσκουμε

$$y'(x) = -\sin x + 3 + \frac{3}{2}\sin x + \frac{3}{2} x \cos x,$$

$$y''(x) = 2\cos x - \frac{3}{2} x \sin x, \quad \text{και}$$

$$y'''(x) = -2\sin x - \frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{2} x \cos x.$$

Οπότε $y'''(x) + y'(x) = 3 - 3\sin x$ και επίσης $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 2 = y(0)$, δηλαδή επαληθεύει την εξίσωση (1) και τις αρχικές συνθήκες (2).

Άσκηση 4. Έστω μ πραγματική σταθερά. Θεωρούμε τη Σ.Δ.Ε.

$$x^3 y'''(x) - 4x^2 y''(x) + 8xy'(x) - 8y(x) = \mu \ln x, \quad x > 0. \tag{1}$$

(i) Να βρεθεί η γενική λύση της (1) για μ=0.

(ii) Στη συνέχεια, κάνοντας την αντικατάσταση $x = e^t$, να βρεθεί η γενική λύση της (1) για $\mu \neq 0$.

$t = \ln x$

Λύση. (i) Παρατηρούμε ότι η ομογενής εξίσωση

$$x^3 y'''(x) - 4x^2 y''(x) + 8xy'(x) - 8y(x) = 0, \quad x > 0 \tag{1'}$$

είναι τύπου Euler και αναζητούμε λύσεις της μορφής $y_\lambda(x) = x^\lambda$. Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x βρίσκομε $y'_\lambda(x) = \lambda x^{\lambda-1}$, $y''_\lambda(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$, $y'''_\lambda(x) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$ και θέτοντας τις $y_\lambda(x)$, $y'_\lambda(x)$, $y''_\lambda(x)$, $y'''_\lambda(x)$ στην (1΄), λαμβάνουμε,

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}x^3 - 4\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}x^2 + 8\lambda x^{\lambda-1}x - 8x^\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 4\lambda(\lambda-1) + 8\lambda - 8]x^\lambda = 0 \Leftrightarrow [\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8]x^\lambda = 0 \overset{x^\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τις τρείς διακεκριμένες πραγματικές ρίζες: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Άρα οι συναρτήσεις $y_1(x) = x^1$, $y_2(x) = x^2$ και $y_3(x) = x^4$ είναι λύσεις της (1΄) οι οποίες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες καθόσον η ορίζουσα Wronski (η Βρονσκιανή) αυτών είναι:

Ασκηση 5 Δίνεται η Σ.Δ.Ε. $x^2(1-\ln x)y''(x)+xy'(x)-y(x)=0,\ \ x>e\quad (1)$

(i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y_1(x)=\ln x$ είναι λύση της (1).

ii) Αναζητώντας λύσεις της μορφής $y(x)=u(x)y_1(x)$ να δειχθεί ότι η (1) ανάγεται στην Σ.Δ.Ε. $x^2\ln x(1-\ln x)u''(x)+x(2-\ln x)u'(x)=0$, την οποία και να επιλύσετε θέτοντας $u'(x)=w(x)$.

iii) Ποιά είναι η γενική λύση της (1) για $x>e$.

Λύση. (i) Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $y_1(x)=\ln x$ δύο φορές ως προς x βρίσκουμε $y_1'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $y_1''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, και θέτοντας στη εξίσωση (1) έχουμε $x^2(1-\ln x)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+x\left(\dfrac{1}{x}\right)-\ln x=0,\ \ x>e$ δηλαδή η $y_1(x)=\ln x$ είναι λύση της (1).

(ii) Χρησιμοποιώντας την Μέθοδο Υποβιβασμού Τάξης (ΕΔΥ CD1: Κεφ. 4), αναζητούμε λύση της μορφής $y(x)=y_1(x)u(x)$, δηλαδή $y(x)=(\ln x)u(x)$. Τότε

$$y'(x)=\frac{1}{x}u(x)+(\ln x)u'(x)\quad \text{και}\quad y''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)u(x)+\frac{2}{x}u'(x)+(\ln x)u''(x).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων αυτών στην (1) λαμβάνουμε:

$$x^2\ln x(1-\ln x)u''(x)+x(2-\ln x)u'(x)=0.$$

Αν θέσουμε $u'(x)=w(x)$, η τελευταία εξίσωση ανάγεται στη γραμμική ομογενή εξίσωση πρώτης τάξης $w'(x)+\dfrac{2-\ln x}{x\ln x(1-\ln x)}w(x)=0$ (η οποία εξάλλου είναι με χωριζόμενες μεταβλητές) της οποίας η γ.λ. δίνεται από $w(x)=ce^{-\int\frac{2-\ln x}{x\ln x(1-\ln x)}dx}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά. Το τελευταίο ολοκλήρωμα δίνει

$$-\int\frac{2-\ln x}{x\ln x(1-\ln x)}dx=\int\left[\frac{1}{x(\ln x-1)}-\frac{2}{x\ln x}\right]dx=\int\frac{dx}{x(\ln x-1)}-\int\frac{2dx}{x\ln x}=\ln(\ln x-1)-2\ln(\ln x),$$ άρα

$w(x)=ce^{\ln(\ln x-1)-2\ln(\ln x)}=c\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, και αν θέσουμε c=1 τότε $u'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\Rightarrow u(x)=\displaystyle\int\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}dx.$

Παρατηρούμε ότι $\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, οπότε από την τελευταία ισότητα προκύπτει $u(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Τελικά μια (δεύτερη) λύση είναι η $y_2(x)=u(x)y_1(x)=\dfrac{x}{\ln x}\ln x=x$.

(iii) Οι δύο συναρτήσεις $y_1(x)=\ln x$ και $y_2(x)=x$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1) καθόσον η Βρονσκιανή αυτών είναι: $W(y_1,y_2;x)=\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1/x\end{vmatrix}=1-\ln x\neq 0,\ \ x>e$ και η γ.λ. της (1) είναι:

$$y(x)=c_1x+c_2\ln x,\ \text{ όπου } c_1,c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

$$W(y_1,y_2,y_3;x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix}=6x^4\neq 0, \text{ για } x\neq 0.$$

Κατά συνέπεια η γ. λ. της (ομογενούς) (1΄) θα είναι

$$y_o(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \text{ αυθαίρετες σταθερές.} \quad (2)$$

(ii) Με την αντικατάσταση $x=e^t$ (δηλαδή t=lnx, x>0) προκύπτει:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Rightarrow xy'=\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\Rightarrow x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

και ομοίως βρίσκομε

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)\Rightarrow x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}.$$

Θέτοντας τις παραπάνω τιμές στην (1) έχομε:

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-4\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+8\frac{dy}{dt}-8y=\mu t \quad \text{ή} \quad \frac{d^3y}{dt^3}-7\frac{d^2y}{dt^2}+14\frac{dy}{dt}-8y=\mu t \quad (3)$$

Η (3) είναι ΣΔΕ (μη ομογενής), όπου y=y(t) η άγνωστη συνάρτηση και t η ανεξάρτητη μεταβλητή. Η αντίστοιχη ομογενής έχει επιλυθεί στο ερώτημα (i), οπότε θα αναζητήσομε μια μερική λύση της (3), έστω $y_\mu(x)$, με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Ο μη ομογενής όρος της (3) είναι: $f(t)=\mu t=e^{0t}\left[\mu t\cos(0t)+0\sin(0t)\right]$, οπότε $\alpha=0$, $\beta=0$, $P_1(x)\equiv\mu t$, $Q_0(x)\equiv 0$, $s=1$. Ο αριθμός $\alpha+i\beta=0$ **δεν** είναι ρίζα της χ.ε. της (3) (βλέπε (i)), οπότε $\pi=0$. Συνεπώς η (i) δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$$y_\mu(t)=e^{0x}[(At+B)\cos 0x+(\Gamma t+\Delta)\sin 0x]=At+B, \text{ όπου A, B σταθερές.}$$

Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή t, έχουμε $y'_\mu(t)=A$, $y''_\mu(t)=0$, $y'''_\mu(t)=0$, και θέτοντας στην (3) βρίσκομε: $14A-8At-8B=\mu t\Rightarrow A=-\frac{\mu}{8}$, $B=-\frac{7\mu}{32}$. Δηλαδή $y_\mu(t)=-\frac{\mu}{8}t-\frac{7}{32}\mu$ και, επειδή t=lnx, x>0, προκύπτει $y_\mu(t)=-\frac{\mu}{8}\ln x-\frac{7}{32}\mu$. Συνεπώς η γ.λ.της (1) για $\mu\neq 0$ είναι

$$y(x)=y_o(x)+y_\mu(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4-\frac{\mu}{8}\ln x-\frac{7}{32}\mu, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Άσκηση 6.

Δίνεται η μη ομογενής Σ.Δ.Ε.:

$$x^2(1-\ln x)y''(x)+xy'(x)-y(x)=x^2(1-\ln x)^2,\quad x>e. \qquad (1)$$

(i) Εξηγείστε αν μπορεί να εφαρμοσθεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (1).

(ii) Με χρήση της μεθόδου μεταβολής των (σταθερών) παραμέτρων (Lagrange), να βρεθεί η γενική λύση της (1) λαμβάνοντας υπόψη τις δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς που βρήκατε στην άσκηση 5.

Λύση. (i) Επειδή η δοθείσα εξίσωση (1) είναι με μεταβλητούς συντελεστές (αλλά και η συνάρτηση $x^2(1-\ln x)^2$ δεν είναι της μορφής της συνάρτησης f(x) όπως περιγράφεται στην Άσκηση 2), η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών δεν μπορεί να εφαρμοσθεί.

(ii) Η εξίσωση (1) γράφεται: $y''(x)+\dfrac{x}{x^2(1-\ln x)}y'(x)-\dfrac{1}{x^2(1-\ln x)}y(x)=1-\ln x,\quad x>e.$ (2)

Από την άσκηση 5 είδαμε ότι οι δύο συναρτήσεις $y_1(x)=\ln x$ και $y_2(x)=x$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς της (1) η οποία έχει γ.λ. $y_0(x)=c_1x+c_2\ln x$, όπου c_1,c_2 αυθαίρετες σταθερές. Σύμφωνα με τη μέθοδο μεταβολής των (σταθερών) παραμέτρων (Lagrange), αναζητούμε μια μερική λύση της (2), της μορφής $y_\mu(x)=u_1y_1+u_2y_2=u_1x+u_2\ln x$, όπου $u_1=u_1(x)$, $u_2=u_2(x)$ συναρτήσεις του x που πληρούν το σύστημα:

$$u'_1x+u'_2\ln x=0$$

$$u'_1+u'_2\frac{1}{x}=1-\ln x,$$

το οποίο έχει λύσεις $u'_1(x)=-\ln x$, $u'_2(x)=x$, από όπου με ολοκλήρωση ως προς x, προκύπτει ότι $u_1(x)=x-x\ln x$, $u_2(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Επομένως μια μερική λύση της (2) είναι η

$$y_\mu(x)=(x-x\ln x)x+\frac{x^2}{2}\ln x=x^2(1-\frac{1}{2}\ln x)$$

και η γ. λ. της (1) είναι το άθροισμα των $y_o(x)$ και $y_\mu(x)$, δηλαδή

$$y(x)=y_o(x)+y_\mu(x)=c_1x+c_2\ln x+x^2(1-\frac{\ln x}{2}),$$ όπου c_1,c_2 αυθαίρετες σταθερές.